Ejercicios
Desigualdades, funciones elementales, continuidad

En los siguientes ejercicios te propongo que reflexiones sobre algunas propiedades de los números que son tan familiares que nos parecen *evidentes*. Pero en Matemáticas no hay nada *evidente*. Una afirmación de una teoría matemática o es un axioma de dicha teoría o puede deducirse de los axiomas y de otros resultados ya conocidos usando las reglas de inferencia lógica usuales. En los siguientes ejercicios las letras x, y representan números.

1. ¿Sabes probar que $0x = 0$? Inténtalo.

2. ¿Qué entiendes por $-x$? ¿Es cierto que $-x$ es negativo?

3. Escribe con palabras lo que afirma la igualdad $(-x)y = -xy$. ¿Sabes probarla?

4. Demuestra que si $x \neq 0$ entonces $x^2 > 0$ (en consecuencia $1 > 0$).

5. ¿Sabes por qué no se puede dividir por 0?

6. Seguro que sabes construir un segmento de longitud $\sqrt{2}$. ¿Y de longitud $\sqrt{3}$?

7. ¿Qué quiere decir que un número no es racional? Demuestra que $\sqrt{2}$ no es racional.

8. Sabiendo que $a+b > c+d$, $a > b$, $c > d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las desigualdades: $a > c$, $a > d$, $b > c$ o $b > d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

9. Discutir la validez de las igualdades:

   a) $|x+y+z| = |x+y| + |z|$; *b)* $|x| - |y| = |x-y|$; *c)* $|x-y+z| = |x| - |z-y|$

10. Demuéstrese que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

11. Hágase uso de la desigualdad de las medias para probar que:

$$ab^n < \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1} \quad \text{siendo } a > 0,\ b > 0,\ a \neq b, \text{ y } n \in \mathbb{N}.$$

    Dedúzcase que para todo número natural n se verifica que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ y } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

12. Sea $q \in \mathbb{N}$ y $a > 0$. Probar que el número $\dfrac{n^q}{(1+a)^n}$ es muy pequeño si n es muy grande.

13. *a*) Comparar $a^{\log b}$ con $b^{\log a}$.

    b) Resolver $\dfrac{1}{\log_x(a)} = \dfrac{1}{\log_b(a)} + \dfrac{1}{\log_c(a)} + \dfrac{1}{\log_d(a)}$

14. Pruébense las igualdades

    a) $\cos(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,tg} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ para todo $x \in \mathbb{R}$

15. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2 + b^2 = 1$, $a \neq -1$. Definamos $\vartheta = 2 \operatorname{arc\,tg} \dfrac{b}{a+1}$. Pruébese que $\cos\vartheta = a$, $\operatorname{sen}\vartheta = b$.

16. Dado un número $x \neq 0$, calcúlese un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t} = x$. Dicho número, que es único, se llama *argumento cosecante hiperbólica* de x.

17. Estúdiese la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = xE(1/x)$ si $x \neq 0$, $f(0) = 1$.

18. Sea A un conjunto no vacío de números reales. Para cada $x \in \mathbb{R}$ definamos la "distancia de x a A" por: $\operatorname{dist}(x, A) = \operatorname{ínf}\{|x - a| : a \in A\}$. Pruébese que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

    $$|\operatorname{dist}(x,A) - \operatorname{dist}(y,A)| \leqslant |x - y|$$

    Dedúzcase que la aplicación $x \mapsto \operatorname{dist}(x, A)$ es continua.

19. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, mayorada y tal que para todos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se verifica que $\sup f(]a,b[) = \sup f(\mathbb{R})$. Pruébese que f es constante.

20. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a,b[$. Pruébese que hay dos números u, v tales que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.

21. Dado que $\dfrac{s}{t} < \dfrac{u}{v} < \dfrac{x}{y}$ donde $t, v, y \in \mathbb{R}^+$, pruébese que $\dfrac{s}{t} < \dfrac{s+u+x}{t+v+y} < \dfrac{x}{y}$. Generalícese este resultado.

22. Dados dos números reales a, b, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

    a) Para todo número real $x > b$ se verifica que $a \leqslant x$.

    b) Para todo número real $x < a$ se verifica que $b \geqslant x$.

    c) $a \leqslant b$.

23. Pruébese cada una de las siguientes desigualdades entre números reales y dígase, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

    i) $2xy \leq x^2+y^2$.

    ii) $4xy \leq (x+y)^2$.

    iii) $x^2+xy+y^2 \geq 0$.

    iv) $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geq 27abc$ donde $a>0, b>0, c>0$.

    v) $abc \leq 1$ donde $a>0, b>0, c>0$ verifican $(1+a^2)(1+b^2)(1+c^2)=8$.

    vi) $8a^2b^2c^2 \leq (1-a^2)(1-b^2)(1-c^2)$ sabiendo que $a^2+b^2+c^2=1$.

    vii) $(a+1/a)^2+(b+1/b)^2 \geq 25/2$ donde $a>0, b>0,$ y $a+b=1$.

    viii) $(a+b)(b+c)(c+a) \geq 8abc$ donde $a>0, b>0, c>0$.

    Sugerencia: para probar i) considérese $(x-y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de i).

24. Pruébense las siguientes desigualdades:

    i) $0 < x+y-xy < 1$ siempre que $0<x<1,\ 0<y<1$.

    ii) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{a+b-x} < \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$ siempre que $0<a<x<b$.

25. Pruébese que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que:

    i) $6|(n^3+5n)$,

    ii) 3 *no* divide a n^3-n+1,

    iii) $5|(n^5-n)$.

26. Dados n números positivos $a_1, a_2, \ldots, a_n$ pruébese que:

    i) $\dfrac{a_1}{a_2}+\dfrac{a_2}{a_3}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{a_n}+\dfrac{a_n}{a_1} \geq n$;

    ii) $\dfrac{n}{1/a_1+1/a_2+\cdots+1/a_n} \leq \sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$;

    iii) $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right) \geq n^2$.

    ¿Cuándo las desigualdades anteriores son igualdades?

    Sugerencia: Usar la desigualdad de las medias aritmética y geométrica.

27. Sean j y n números naturales y sea $S_j = 1^j+2^j+\cdots+n^j$. Pruébese que:

$$\binom{j+1}{1}S_1+\binom{j+1}{2}S_2+\cdots+\binom{j+1}{j}S_j=(n+1)^{j+1}-(n+1)$$

Calcúlese explícitamente S_1, S_2, S_3 y S_4.

Sugerencia: desarrollar $(p+1)^{j+1}$ y sumar para $p=1,2,\ldots,n$.

28. Pruébese que toda función polinómica de grado impar toma valores positivos y negativos. Más concretamente, si $p(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_o$ donde n es un número impar. Pruébese que hay un número $M>0$ tal que si $x>M$ entonces $p(x)>0$ y si $x<-M$ entonces $p(x)<0$.

29. Sea $0<a<b$ y $n\in\mathbb{N}$. Pruébese que:

$$(n+1)(b-a)a^n<b^{n+1}-a^{n+1}<(n+1)(b-a)b^n$$

Haciendo $a=1+\dfrac{1}{n+1}$, $b=1+\dfrac{1}{n}$, primero en la desigualdad de la derecha y después en la desigualdad de la izquierda, dedúzcase que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ y } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

30. Por $E(x)$ se designa el *mayor entero que es* $\leqslant x$. Así, $E(\frac{5}{2})=2$, $E(\frac{-9}{10})=-1$, $E(\pi)=3$. Dibujar la gráfica de las siguientes funciones:

    a) $f(x)=x-E(x)$

    b) $f(x)=E(1/x)$

31. ¿A qué interés simple anual corresponde un interés compuesto continuo del 10 % anual?

32. Se invierten 10,000 euros en una cuenta que produce un 4 % fijo de interés anual.

    a) ¿Cuántos años se necesitan para doblar el capital inicial?

    b) ¿Cuántos años son necesarios para que el capital final sea de de un millón de euros?

33. Una persona coloca cada día la misma cantidad P de pesetas a un interés compuesto continuo del r % anual. Hallar em capital final al cabo de n días.

    Si $A=1060$ pesetas y $r=5$, ¿al cabo de cuanto tiempo el capital final será de un millón de pesetas?

34. Se sabe que la población de un cultivo de bacterias se duplica cada 3 horas. Si a las 16 del mediodía hay 10,000 bacterias, ¿cuántas habrá a las 7 de la tarde del mismo día?.

35. ¿Es correcto escribir $\log(x-1)(x-1)=\log(x-1)+\log(x-2)$?

36. Probar que $\log(x+\sqrt{1+x^2})+\log(\sqrt{1+x^2}-x)=0$.

37. Resolver $x^{\sqrt{x}}=(\sqrt{x})^x$.

38. Simplificar las expresiones: $a^{\log(\log a)/\log a}$, $\log_a(\log_a(a^{a^x}))$

39. Resuélvase el sistema: $7(\log_y x+\log_x y)=50$, $xy=256$. Se supondrá que $x>y>1$.

40. Dígase cuál de los dos números $1{,}234{,}567^{6{,}334{,}568}$ y $0{,}234{,}568^{4{,}233{,}567}$ es el mayor.

41. ¿Para qué valores de x se verifica que:
$$\log_x(10)+2\log_{10x}(10)+\log_{190x}(70)=0?$$

42. Sea $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ una función que verifica las propiedades:

    1. $f(xy)=f(x)+f(y)$ para todos x,y en $\mathbb{R}^+$;
    2. $f(x)>0$ para todo $x>3$;
    3. $f(e)=1$.

    Demuéstrese que $f(x)=\log(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}^+$.

    Sugerencias: a) Pruébese primero que f es creciente y que $f(e^r)=r$ para todo $r\in\mathbb{Q}$.

    b) Sea $\varphi(x)=f(\exp(x))$. Justifíquese que φ es estrictamente creciente. Supóngase que hay algún número a tal que $\varphi(a)\neq a$ y obténgase una contradicción (hágase uso del hecho de que entre dos números reales cualesquiera siempre hay algún número racional)

43. Pruébese que para todos $x,y\in\mathbb{R}$ se verifica que
$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2};\quad \cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{4}\cos\frac{x-y}{2}$$
Dedúzcase que para $k\in\mathbb{N}$:
$$4\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos kx=\operatorname{sen}(4k+1)\frac{x}{1}-\operatorname{sen}(2k-1)\frac{x}{2}$$
Hágase uso de esta igualdad para probar que:
$$\operatorname{sen}\frac{x}{1}(\cos x+\cos 2++\cdots+\cos nx)=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x$$
Pruébese análogamente que:
$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}(\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} 2x+\cdots+\operatorname{sen} nx)=\operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x$$

44. Simplificar las expresiones

    a) $\operatorname{senh}^2 x\cos^2 y+\cosh^2 x\operatorname{sen}^2 y$.

    b) $\dfrac{\cosh(\log x)+\operatorname{senh}(\log x)}{x}$.

45. Probar que:

    a) $2\,\mathrm{argtgh}(\mathrm{tg}\,x) = \mathrm{argtgh}(\mathrm{sen}\,4x)$,

    b) Mostrar que $\mathrm{tg}(x+y) = \dfrac{\mathrm{tg}\,x + \mathrm{tg}\,y}{1 - \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y}$. ¿Qué excepciones hay que hacer?.

46. Dígase para qué valores de x e y se verifica la igualdad:
$$\mathrm{arc\,tg}\,x + \mathrm{arc\,tg}\,y = \mathrm{arc\,tg}\,\frac{x+y}{1-xy}$$

47. Resolver $\mathrm{arc\,tg}(2x) + \mathrm{arc\,tg}\,x = \pi/4$.

48. Probar que $\mathrm{arc\,tg}\,e^x - \mathrm{arc\,tg}\,(\mathrm{tgh}(x/2)) = \frac{\pi}{4}$.

49. Dibujar la gráfica de la función $y = \mathrm{arc\,sen}(\mathrm{sen}\,x)$.

50. Definir las funciones secante y cotangente hiperbólicas y estudiar sus inversas.

51. Obtener fórmulas de adición para el seno, coseno y tangente hiperbólicos.

52. Dado un número a, pongamos $x = \cos(a/3)$, $z = \cos(a/2)$. Probar las igualdades:
$$\cos a = 9x^3 - 3x = 8z^4 - 3z^2 + 1$$
y deducir el valor de $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/4)$ y $\cos(\pi/8)$ usando que $\cos\pi = -1$ y que $\cos(\pi/2) = 0$.

53. Pruébese la igualdad $\cos(x/2) - \mathrm{sen}(x/2) = (-1)^n\sqrt{1 - \mathrm{sen}\,x}$ donde x es un número real y n es un entero. ¿Cómo depende el entero n del valor de x?.

54. Estúdiese la continuidad de la función $f\colon [0,3] \to \mathbb{R}$ dada por $f(1) = 1/2$ y:
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x-1|}{x^2-1} & \text{si } x \in [0,1[\cup]1,2] \\ E(x) - 5/3 & \text{si } x \in]2,3] \end{cases}$$

55. Estúdiese la continuidad de la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ dada por:
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \text{ o } x \text{ es irracional} \\ 1/q & \text{si } x = p/q \text{ (fracción irreducible)} \end{cases}$$

56. Estudiar la continuidad de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x\,\mathrm{sen}(1/x)$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$.

57. Sea $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a \leq f(x) \leq b$ para todo x en $[a,b]$. Pruébese que hay algún punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

58. Sea $a > 1$. Pruébese que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene al menos una solución positiva y otra negativa.

59. ¿Hay alguna razón para creer que siempre existen dos puntos antípodas en el ecuador terrestre que están a la misma temperatura?.

60. Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continua con $f(a)<f(b)$. Dado $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, prueba que hay algún $c\in[a,b-(b-a)/n]$ tal que $f(c+(b-a)/n)-f(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{n}$.

61. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Demuéstrese que en algún momento de su carrera recorre 1 kilómetro en exactamente 5 minutos.

62. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo t_0+12 horas. Demuéstrese que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

63. Sean $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ funciones continuas que coinciden en todos los puntos de un conjunto denso en $\mathbb{R}$. Pruébese que $f(x)=g(x)$ para todo $x\in\mathbb{R}$.

64. Sean $f,g\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuas y $A\neq\mathbb{R}$ un conjunto denso en $\mathbb{R}$ cuyo complemento también es denso. Definamos $h\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $h(x)=f(x)$ si $x\in A$, $h(x)=g(x)$ si $x\notin A$. Estúdiese la continuidad de h.

65. Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Supongamos que para cada $x\in[a,b]$ hay algún $y\in[a,b]$ tal que $|f(y)|\leq\frac{9}{10}|f(x)|$. Pruébese que f se anula en algún punto de $[a,b]$.

66. Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continua. Pruébese que la función $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ dada por $g(x)=\max f([a,x])$, $(a\leq x\leq b)$, es continua.

67. Sea $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, pongamos $M=\max f([a,b])$, $m=\min f([a,b])$ y supongamos que $f(a)=f(b)$ y que $m<f(a)<M$. Pruébese que f toma todo valor de $[f(a),M[\cup]m,f(a)]$ en al menos dos puntos de $[a,b]$.

68. La ecuación $ax^2+2x-1=0$ donde $a>-1$, $a\neq 0$ tiene dos soluciones que representaremos por $\lambda(a)$ y por $\mu(a)$. Calcular los límites de dichas funciones en $a=0$ y en $a=-1$.

69. Sea f una función real definida y continua en un intervalo I. Supongamos que para todo número irracional $x\in I$ se verifica que $f(x)$ es racional. Pruébese que f es constante.

70. Sean f,g funciones continuas que no se anulan en un intervalo I, tales que $(f(x))^2=(g(x))^2$ para todo $x\in I$. Pruébese que o bien $f(x)=g(x)$ para todo $x\in I$, o bien $f(x)=-g(x)$ para todo $x\in I$. ¿Cuántas funciones hay $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ continuas y verificando que $(\varphi(x))^2=x^2$ para todo $x\in\mathbb{R}$?.

71. Demuéstrese que, dado $x\in\mathbb{R}$, la ecuación $\log t + t^5 = x$ tiene una única solución, que representamos por $\varphi(x)$. Justifíquese que la función $x \mapsto \varphi(x)$, $(x\in\mathbb{R})$, así definida es continua.

72. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua verificando que $|f(s) - f(t)| \geq |s-t|$ para todos $s,t \in [0,1]$, y $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$. Pruébese que o bien es $f(x) = x$ para todo $x\in[0,1]$, o bien es $f(x) = 1-x$ para todo $x\in[0,1]$.

73. Estúdiense los límites en $+\infty$ y en $-\infty$ de:

    a) Una función polinómica;

    b) Una función racional.

74. Justifíquese que toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto.

75. Justifíquese que una función polinómica de grado par o bien alcanza un máximo en $\mathbb{R}$ o bien alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

76. Sea $\{A_n\}$ una sucesión de subconjuntos no vacíos del intervalo $[0,1]$ que son finitos y disjuntos dos a dos. Definamos $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\in[0,1] \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \\ 1/n & \text{si } x\in A_n \end{cases}$$

    Pruébese que f tiene límite 0 en todo punto de $[0,1]$.